Grado en Física – Análisis Matemático I

Relación de ejercicios 1 - Soluciones

Ejercicio 1. Lee el epígrafe 1.1.1. *“Axiomas, definiciones, teoremas, lemas, corolarios.”* de mi libro *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*.

Después de leerlo explica el significado de la expresión “$H \Longrightarrow T$”. Explica también con todo detalle qué es lo que hacemos en matemáticas cuando demostramos un teorema.

Solución. Si H y T son dos proposiciones, la expresión “$H \Longrightarrow T$” *es una nueva proposición que significa la disyunción lógica* $(\text{no}H) \vee T$. Demostrar un teorema consiste en *probar que una proposición del tipo* $H \Longrightarrow T$ *es verdadera*. Puesto que si H es falsa $(\text{no}H) \vee T$ es verdadera, para probar que $H \Longrightarrow T$ es verdadera lo que hay que hacer es probar que *si* H es verdadera entonces T es verdadera. Suele llamase a H la hipótesis y a T la tesis del teorema. Hay que notar que no se trata de probar que H sea verdadera o que T sea verdadera. Claro está, si sabemos que H y que $H \Longrightarrow T$ son verdaderas entonces T es verdadera. ☺

Ejercicio 2. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad $\dfrac{1-2x}{x^2-4} > \dfrac{1}{2}$.

Solución. Se trata de una desigualdad entre funciones racionales (la función racional de la derecha es una constante). Seguiremos el procedimiento general visto en clase. Tenemos que:

$$\frac{1-2x}{x^2-4} > \frac{1}{2} \iff \frac{1-2x}{x^2-4} - \frac{1}{2} > 0 \iff \frac{-x^2-4x+6}{2(x^2-4)} > 0 \iff (x^2+4x-6)(x^2-4) < 0$$

Pongamos $P(x) = (x^2+4x-6)(x^2-4)$. Las soluciones de la ecuación $x^2+4x-6=0$ son $\alpha = -2-\sqrt{10}$ y $\beta = -2+\sqrt{10}$. Por lo que las raíces del polinomio P son, ordenadas de menor a mayor, $\alpha < -2 < \beta < 2$. Tenemos así que:

$$P(x) = (x-\alpha)(x+2)(x-\beta)(x-2)$$

Deducimos que:

$$\begin{aligned}
x < \alpha \quad &\Longrightarrow \quad P(x) > 0 \text{ porque es producto de cuatro números negativos.}\\
\alpha < x < -2 \quad &\Longrightarrow \quad P(x) < 0 \text{ porque es producto de un número positivo y tres negativos.}\\
-2 < x < \beta \quad &\Longrightarrow \quad P(x) > 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y dos negativos.}\\
\beta < x < 2 \quad &\Longrightarrow \quad P(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números positivos y uno negativo.}\\
\beta < x \quad &\Longrightarrow \quad P(x) > 0 \text{ porque es producto de cuatro números positivos.}
\end{aligned}$$

Del estudio anterior se deduce que:

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-2x}{x^2-4} > \frac{1}{2} \right\} =]-2-\sqrt{10}, -2[\cup]-2+\sqrt{10}, 2[.$$

☺

Ejercicio 3. Calcula para qué valores de $x\in\mathbb{R}$ se verifica que $|x-6|(1+|x-3|)\geqslant 1$.

Solución. Para estudiar la desigualdad $|x-6|(1+|x-3|)\geqslant 1$, lo que vamos a hacer es quitar los valores absolutos y para ello consideraremos que x sea mayor o menor que 3 y mayor o menor que 6. Tenemos así las siguientes posibilidades:

- Caso en que $x\leqslant 3$. Tenemos que:

$$|x-6|(1+|x-3|)\geqslant 1 \iff (6-x)(1+3-x)\geqslant 1 \iff x^2-10x+23\geqslant 0.$$

Las raíces de $x^2-10x+23=0$ son $a=5-\sqrt{2}$, $b=5+\sqrt{2}$. Tenemos que $x^2-10x+23\geqslant 0$ cuando sea $x\leqslant a$ o $x\geqslant b$. Como estamos considerando que $x\leqslant 3$, no puede ser $x\geqslant b$ y la condición $x\leqslant a$ se cumple porque $3<a$. Concluimos que la desigualdad estudiada es cierta para $x\leqslant 3$.

- Caso en que $3\leqslant x\leqslant 6$. Tenemos que:

$$|x-6|(1+|x-3|)\geqslant 1 \iff (6-x)(1+x-3)\geqslant 1 \iff x^2-8x+13\leqslant 0.$$

Las raíces de $x^2-8x+13=0$ son $c=4-\sqrt{3}$, $d=4+\sqrt{3}$. Tenemos que $x^2-8x+13\leqslant 0$ cuando $x\in[c,d]$. Como estamos considerando que $x\in[3,6]$, ambas condiciones se cumplen si $x\in[c,d]\cap[3,6]=[3,d]$, donde hemos tenido en cuenta que $c<3<d<6$. Concluimos que la desigualdad estudiada es cierta para $3\leqslant x\leqslant 4+\sqrt{3}$.

- Caso en que $6\leqslant x$. Tenemos que:

$$|x-6|(1+|x-3|)\geqslant 1 \iff (x-6)(1+x-3)\geqslant 1 \iff x^2-8x+11\geqslant 0.$$

Las raíces de $x^2-8x+11=0$ son $u=4-\sqrt{5}$, $d=4+\sqrt{5}$. Tenemos que $x^2-8x+13\geqslant 0$ cuando $x\leqslant u$ o $x\geqslant v$. Como estamos considerando que $x\geqslant 6$, y tenemos que $u<6<v$, no puede ser $x\leqslant u$. Concluimos que la desigualdad estudiada es cierta para $x\geqslant 4+\sqrt{5}$.

Del estudio anterior se deduce que:

$$\mathcal{D}=\{x\in\mathbb{R} : |x-6|(1+|x-3|)\geqslant 1\}=]-\infty,4+\sqrt{3}]\cup[4+\sqrt{5},+\infty[.$$

☺

Ejercicio 4. Calcula para qué valores de $x\in\mathbb{R}$ se verifica que

$$\left|\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}\right|\leqslant 1. \tag{1}$$

Solución. Esta desigualdad es equivalente a las dos desigualdades:

$$-1\leqslant\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}\leqslant 1. \tag{2}$$

Consideremos la parte de la izquierda de esta desigualdad. Tenemos que:

$$-1\leqslant\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}\iff 1+\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}=\frac{x^3+x^2-2x-8}{x^2-2x-3}\geqslant 0\iff(x^3+x^2-2x-8)(x^2-2x-3)\geqslant 0.$$

Como el polinomio x^3+x^2-2x-8 tiene la raíz 2, obtenemos fácilmente:

$$(x^3+x^2-2x-8)(x^2-2x-3)=(x-2)(x^2+3x+4)(x+1)(x-3)$$

Como $x^2 + 3x + 4$ no tiene raíces reales, se sigue que para todo $x \in \mathbb{R}$ es $x^2 + 3x + 4 > 0$, por lo que podemos prescindir de este factor. Hemos obtenido que la parte de la izquierda de la desigualdad (2) es equivalente a:

$$h(x) = (x+1)(x-2)(x-3) \geqslant 0.$$

Como la función racional en (1) no está definida en los ceros del denominador, $x = -1$ y $x = 3$, excluiremos dichos puntos de nuestras consideraciones. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x < -1 \quad &\Longrightarrow \quad h(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1 < x < 2 \quad &\Longrightarrow \quad h(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
2 < x < 3 \quad &\Longrightarrow \quad h(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y uno negativo.}\\
3 < x \quad &\Longrightarrow \quad h(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Como, además, $h(2) = 0$, concluimos que la parte de la izquierda de la desigualdad (2) es cierta para $x \in]-1, 2] \cup]3, +\infty[$.

Consideremos la parte de la derecha de la desigualdad (2). Tenemos que:

$$\frac{x^3-5}{x^2-2x-3} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{x^3-5}{x^2-2x-3} - 1 = \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-2x-3} \leqslant 0 \Longleftrightarrow (x^3+x^2-2x-8)(x^2-2x-3) \leqslant 0.$$

Como el polinomio $x^3 - x^2 + 2x - 2$ tiene la raíz 1, obtenemos fácilmente:

$$(x^3-x^2+2x-2)(x^2-2x-3) = (x-1)(x^2+2)(x+1)(x-3)$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$ es $x^2 + 2 > 0$, por lo que podemos prescindir de este factor. Hemos obtenido que la parte de la derecha de la desigualdad (2) es equivalente a:

$$g(x) = (x+1)(x-1)(x-3) \leqslant 0.$$

Como la función racional en (1) no está definida en los ceros del denominador, $x = -1$ y $x = 3$, excluiremos dichos puntos de nuestras consideraciones. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x < -1 \quad &\Longrightarrow \quad g(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1 < x < 1 \quad &\Longrightarrow \quad g(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
1 < x < 3 \quad &\Longrightarrow \quad g(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y uno negativo.}\\
3 < x \quad &\Longrightarrow \quad g(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Como, además, $g(1) = 0$, concluimos que la parte de la derecha de la desigualdad (2) es cierta para $x \in]-\infty, -1[\cup [1, 3[$.

Concluimos que:

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x^3-5}{x^2-2x-3} \right| \leqslant 1 \right\} = \big( ]-1, 2] \cup]3, +\infty[\big) \bigcap \big( ]-\infty, -1[\cup [1, 3[\big) = [1, 2].$$

☺

Ejercicio 5. Supuesto que $0 < a < b$, calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a+b-x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \tag{3}$$

Solución. Se trata de una desigualdad entre funciones racionales (la función racional de la derecha es una constante). Seguiremos el procedimiento general visto en clase. Tenemos que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a+b-x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{x(a+b-x)} < \frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{x(a+b-x)} - \frac{a+b}{ab} < 0$$

Haciendo las operaciones indicadas y simplificando se obtiene que:

$$\frac{a+b}{x(a+b-x)} - \frac{a+b}{ab} = \frac{(a+b)(x^2-(a+b)x+ab)}{abx(a+b-x)}$$

Como $ab > 0$ y $a+b > 0$, deducimos que la desigualdad (3) es equivalente a:

$$(x^2-(a+b)x+ab)x(a+b-x) = -(x-a)(x-b)x(x-(a+b)) < 0 \Longleftrightarrow H(x) = x(x-a)(x-b)(x-(a+b)) > 0$$

Las raíces de este polinomio son, ordenadas de menor a mayor, $0 < a < b < a+b$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x < 0 &\implies H(x) > 0 \text{ porque es producto de cuatro números negativos.}\\
0 < x < a &\implies H(x) < 0 \text{ porque es producto de un número positivo y tres negativos.}\\
a < x < b &\implies H(x) > 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y dos negativos.}\\
b < x < a+b &\implies H(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números positivos y uno negativo.}\\
a+b < x &\implies H(x) > 0 \text{ porque es producto de cuatro números positivos.}
\end{aligned}$$

Del estudio anterior se deduce que:

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} + \frac{1}{a+b-x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right\} =]-\infty, 0[\cup]a, b[\cup]a+b, +\infty[$$

☺